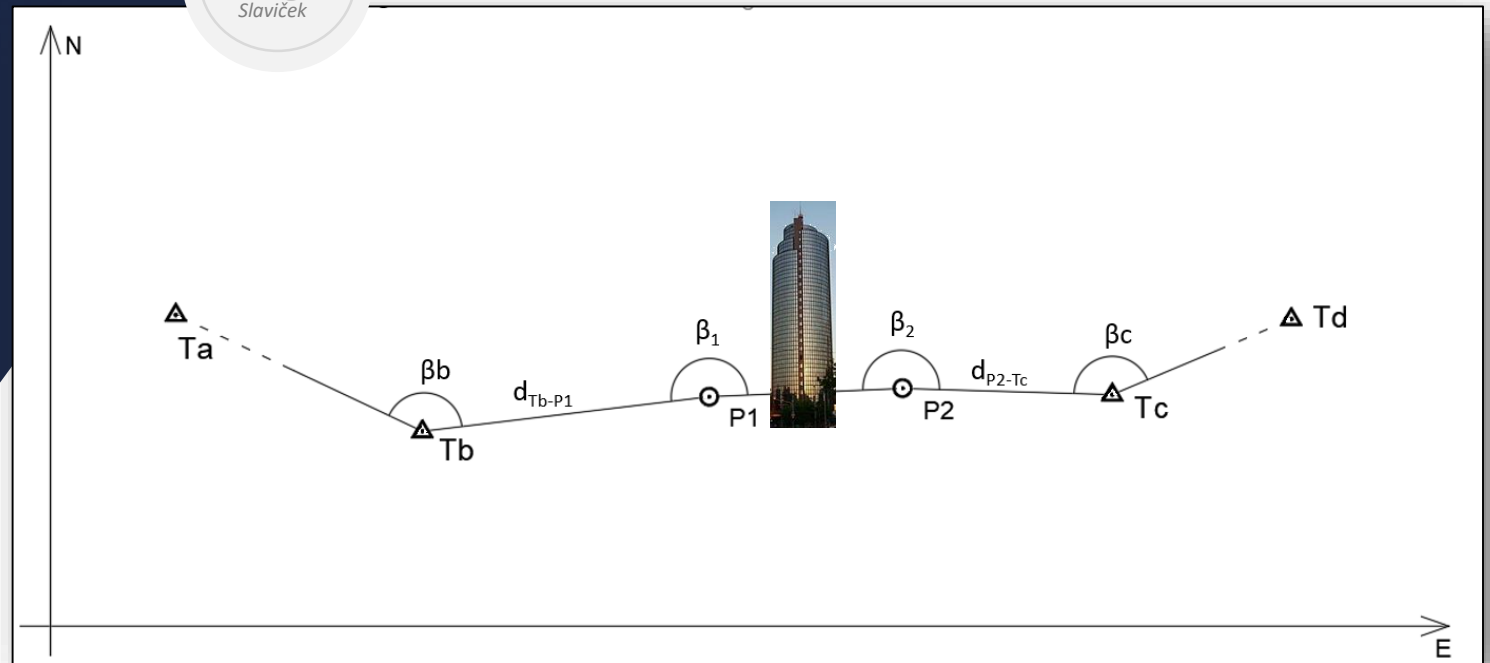
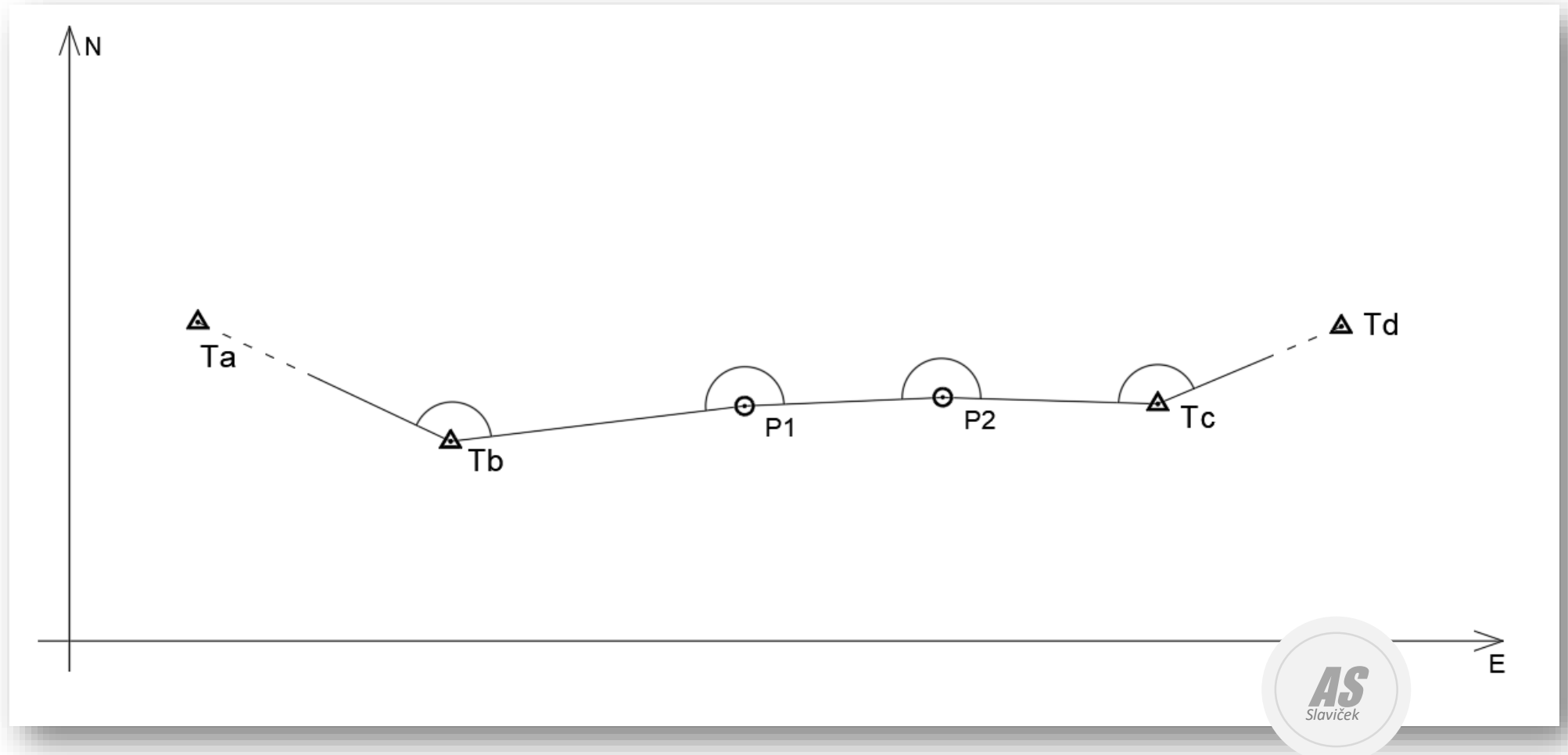


Sinuso Kosinuso Tangensov poučak

Indirektno određivanje
poligonskih stranica



Što mjerimo u poligonskom vlaku?



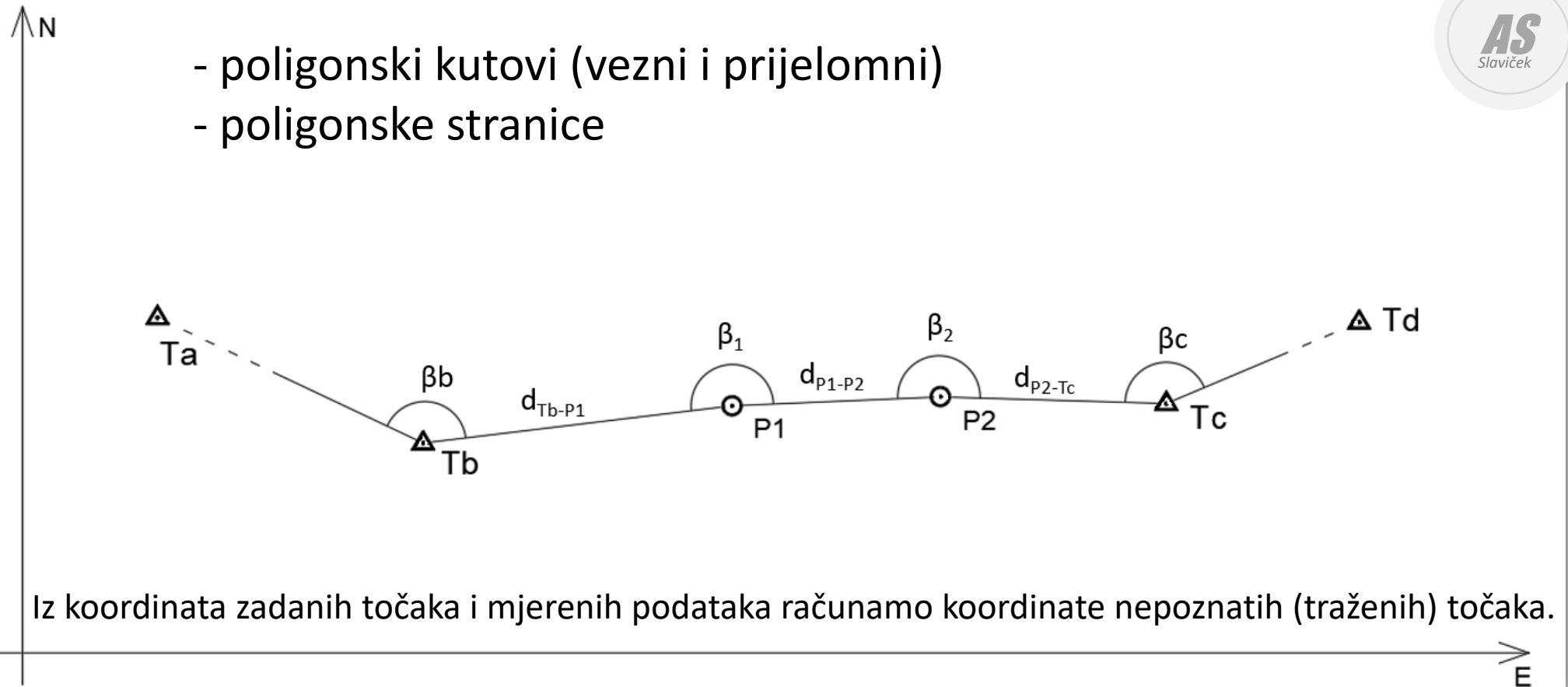
Poligonski vlak

Mjerimo:

- polig. kutove
- polig. stranice

U poligonskom vlaku mjere se:

- poligonski kutovi (vezni i prijelomni)
- poligonske stranice



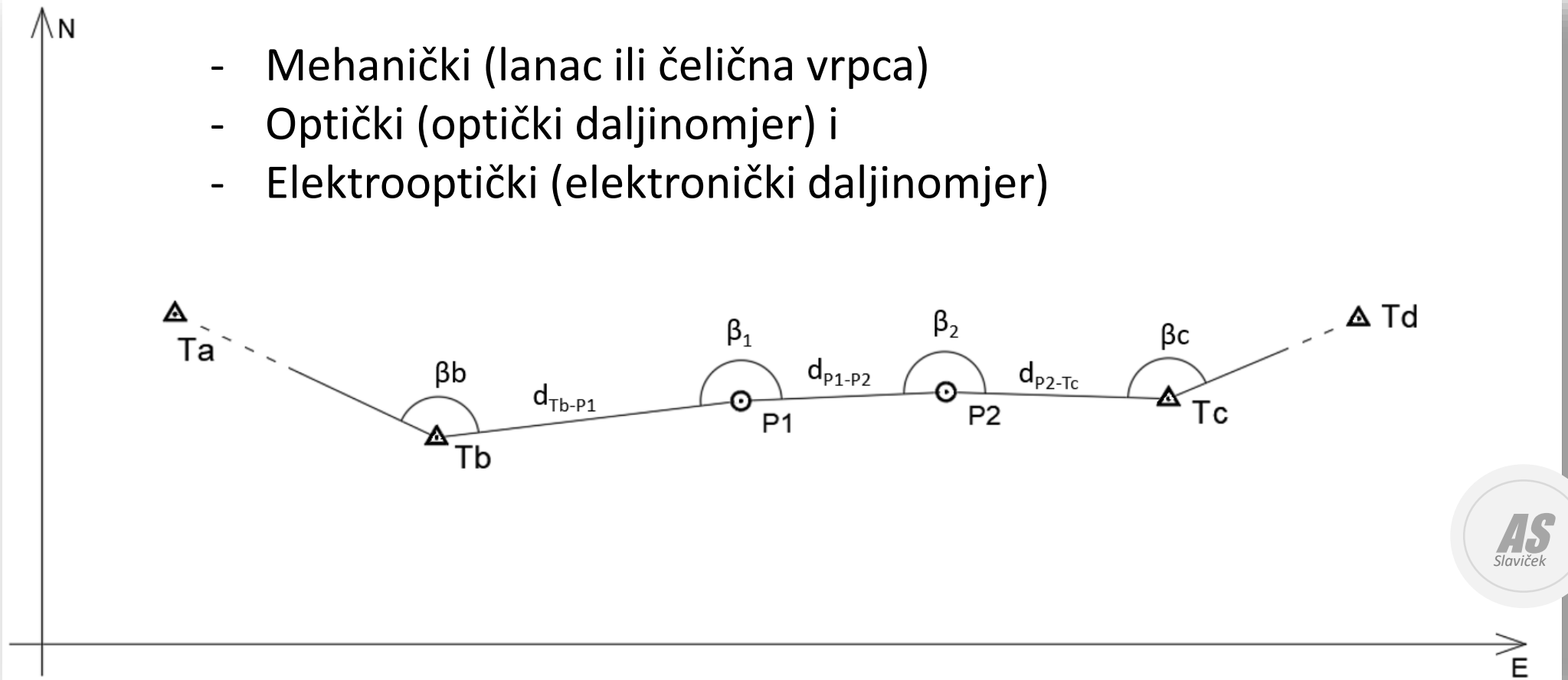
Poligonski stranice mjerimo:

mjerimo:

- Mehanički
- Optički
- Elektrooptički

Poligonske stranice mjerimo:

- Mehanički (lanac ili čelična vrpca)
- Optički (optički daljinomjer) i
- Elektrooptički (elektronički daljinomjer)

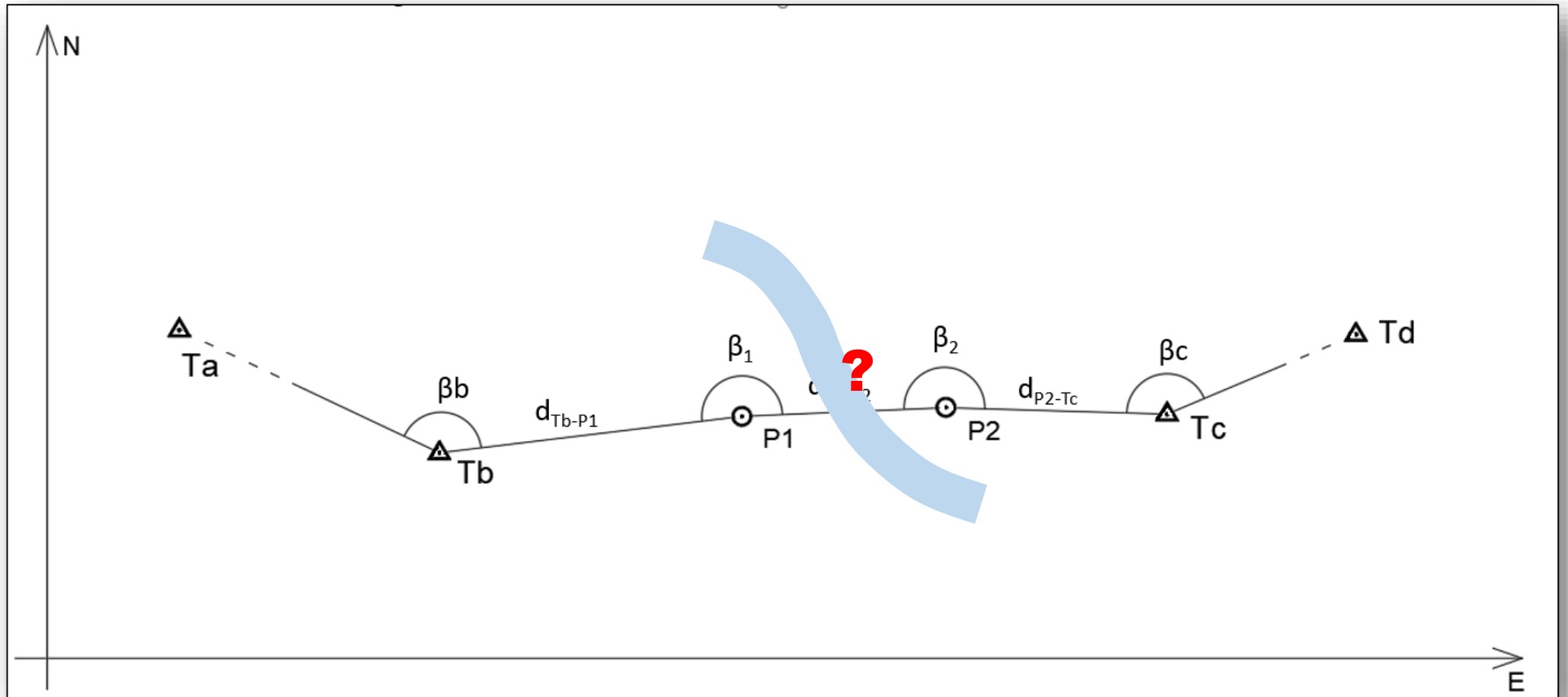


Poligonski stranice

mjerimo:

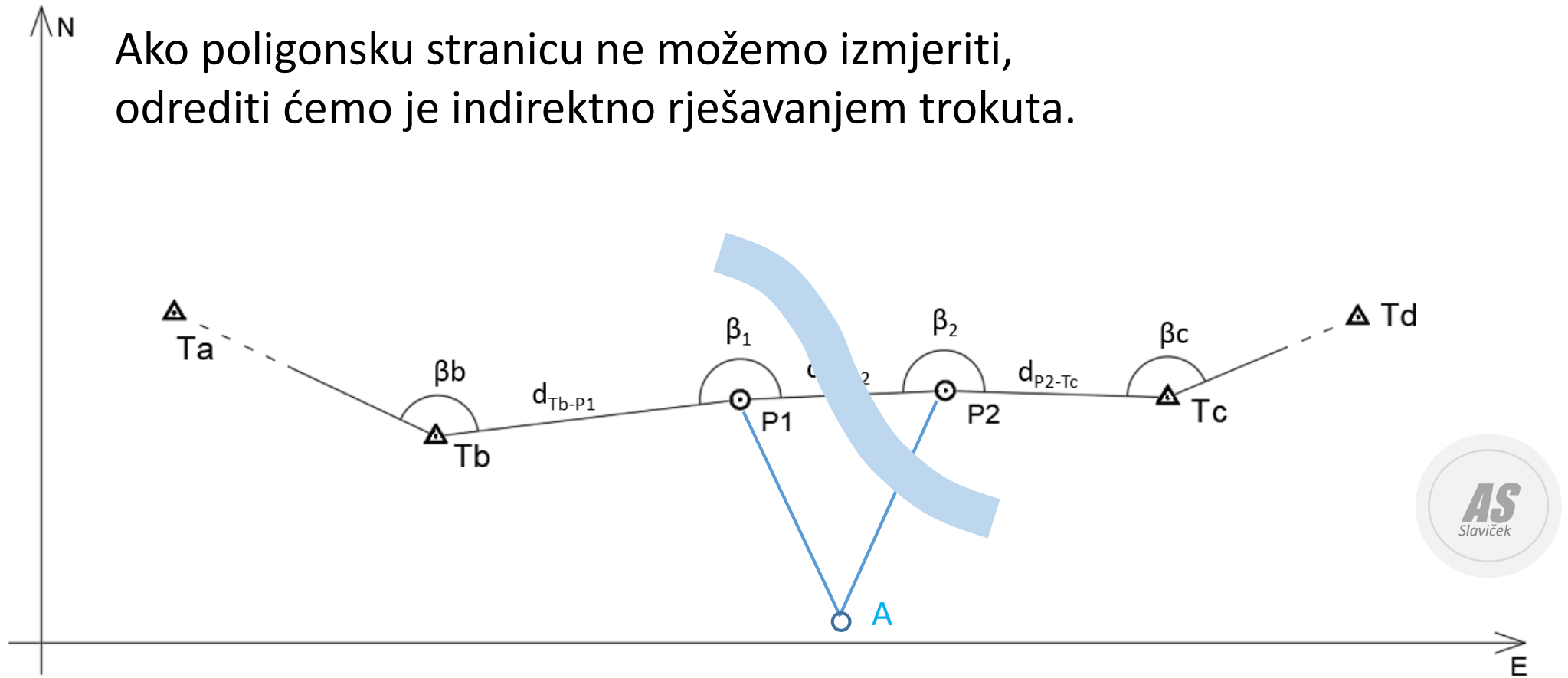
- Mehanički
- Optički
- Elektrooptički

Mjerenje poligonskih stranica



Indirektno određivanje poligonskih stranica

Ako poligonsku stranicu ne možemo izmjeriti,
odrediti ćemo je indirektno rješavanjem trokuta.



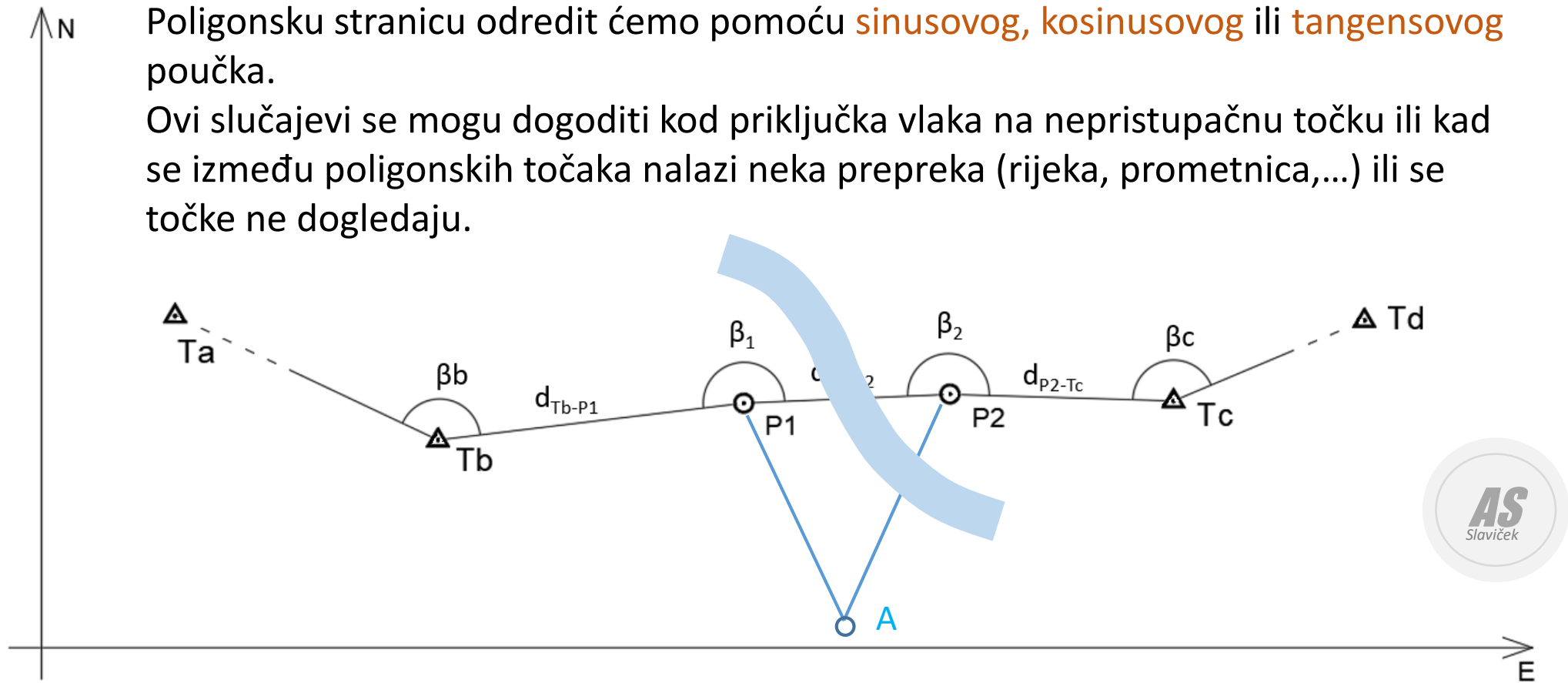
Indirektno određivanje poligonskih stranica

- sinusov
- kosinusov
- tangensov poučak

Indirektno određivanje poligonskih stranica

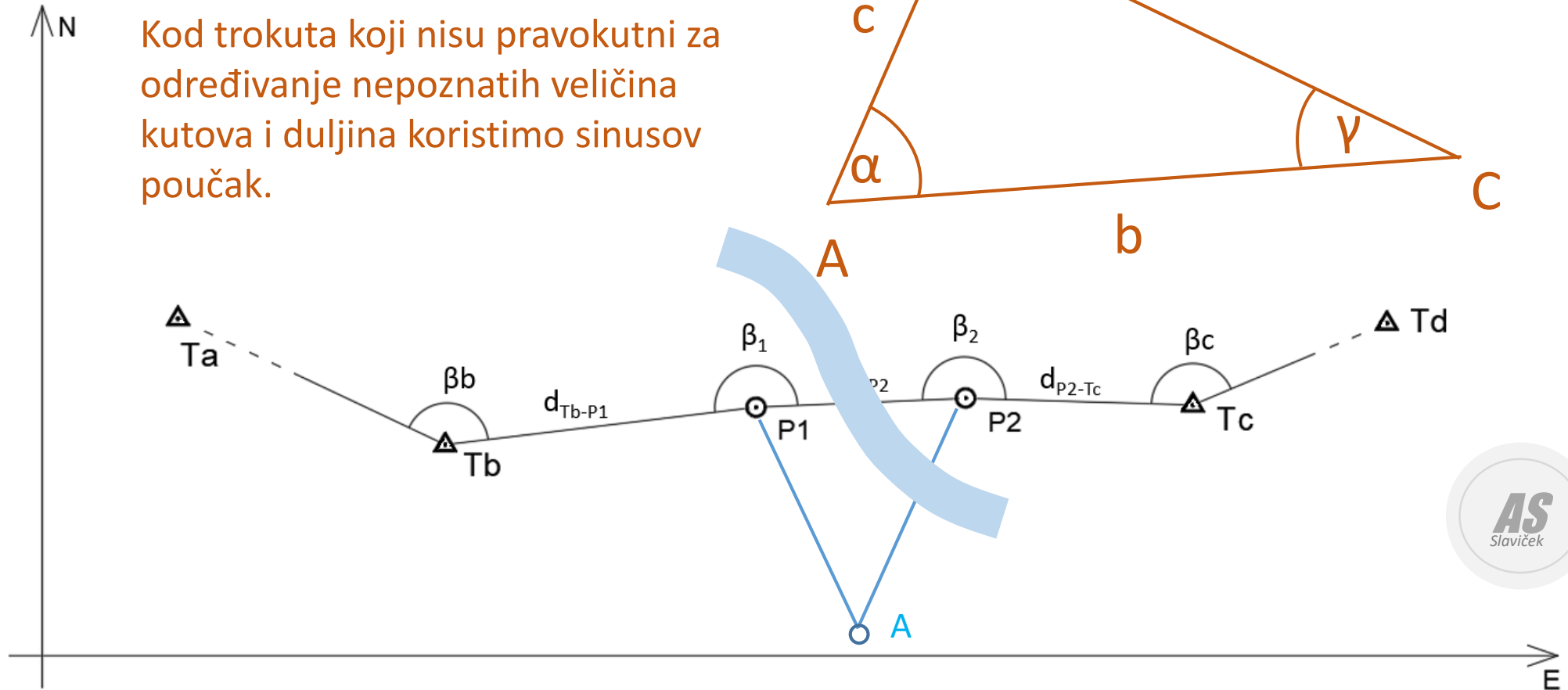
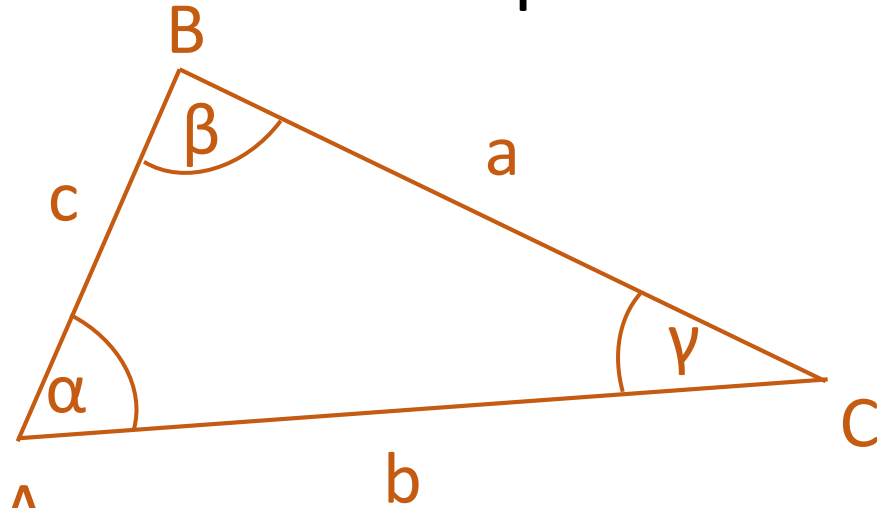
Poligonsku stranicu odredit ćemo pomoću **sinusovog**, **kosinusovog** ili **tangensovog** poučka.

Ovi slučajevi se mogu dogoditi kod priključka vlaka na nepristupačnu točku ili kad se između poligonskih točaka nalazi neka prepreka (rijeka, prometnica,...) ili se točke ne dogledaju.



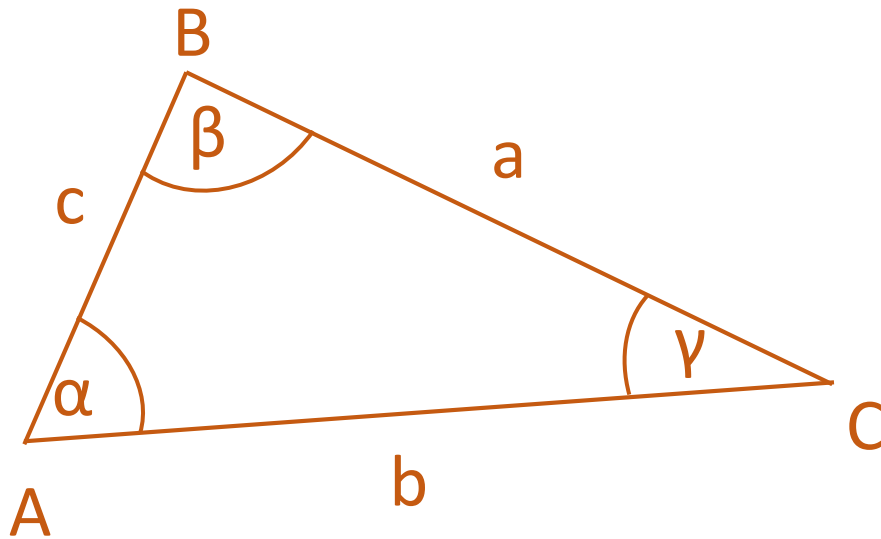
Određivanje poligonske stranice pomoću sinusovog poučka

Kod trokuta koji nisu pravokutni za određivanje nepoznatih veličina kutova i duljina koristimo sinusov poučak.



Sinusov poučak

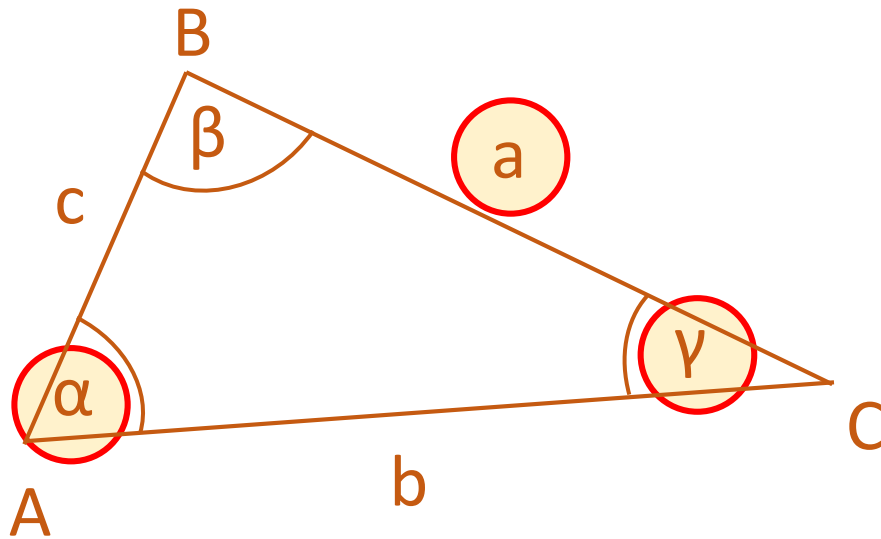
- **Sinusov poučak glasi:** sinusi kutova unutar bilo kakvog trokuta odnose se isto kao stranice nasuprot tim kutovima.



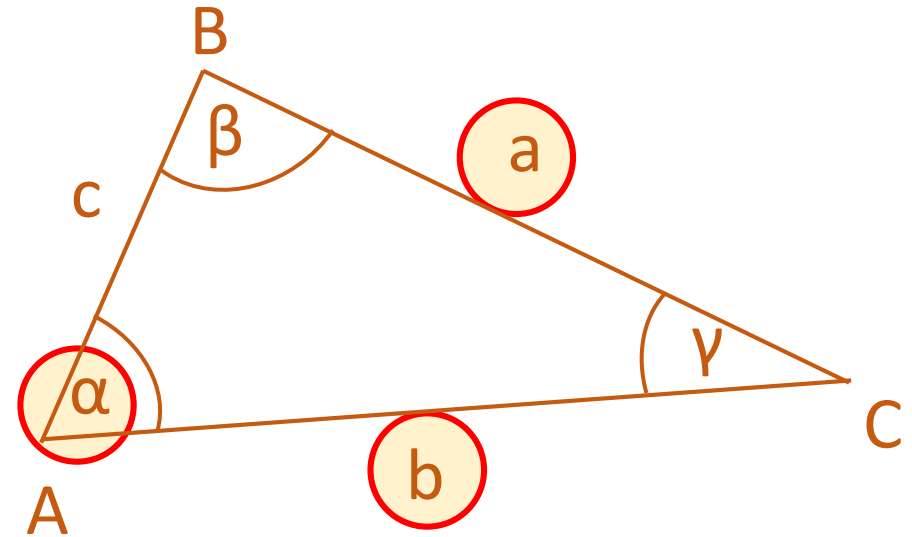
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Sinusov poučak koristimo kada su:

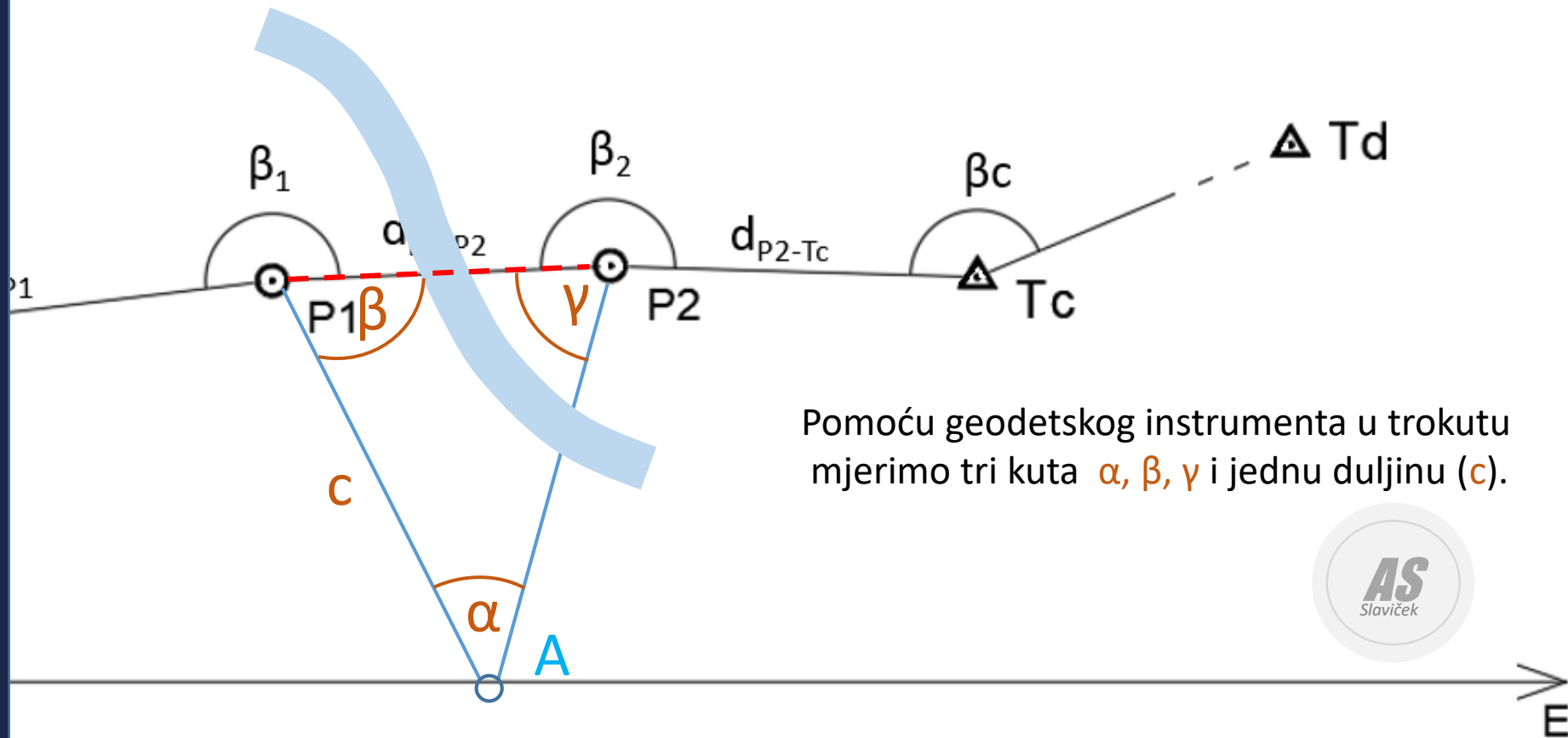
Poznata dva kuta i jedna stranica



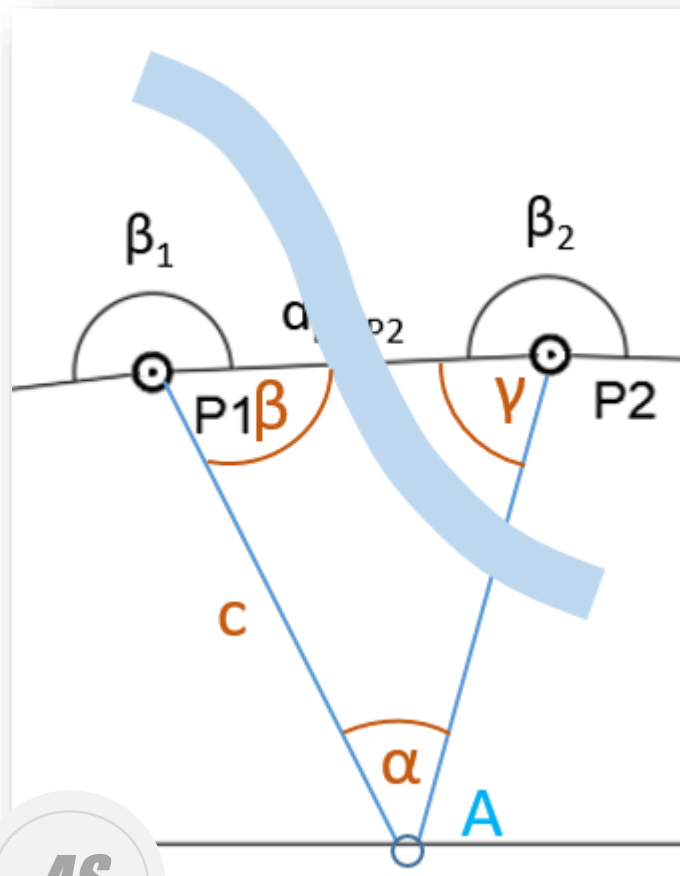
ili dvije stranice i jedan nasuprotni kut u trokutu.



Određivanje poligonske stranice pomoću sinusovog poučka



Određivanje poligonske stranice pomoću sinusovog poučka



Mjereni kutovi			Izjednačeni kutovi				
α	52	12	16	α	52	12	04
β	64	48	58	β	64	48	46
γ	62	59	22	γ	62	59	10
<i>Ukupno</i>	180	00	36	<i>Ukupno</i>	180	00	00
Kutna nesuglasica		fbeta	-36				
Popravka	$v =$	$fb/3$	-12				

Mjereno $c = 87,79$

Računanje nepoznatih vrijednosti duljina

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha \Rightarrow a = 77,86$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \beta \Rightarrow b = 89,17$$

Zadaci

Sinusov poučak

Mjereni kutovi			
α	52	12	08
β	64	48	54
γ	62	59	22
<i>Ukupno</i>			
Kutna nesuglasica		f_β	
Popravka	$v =$	$f_\beta/3$	
Izjednačeni kutovi			
α			
β			
γ			
<i>Ukupno</i>			

a	
b	
c	87,79

Mjereni kutovi			
α	40	16	32
β	85	33	29
γ	54	10	20
<i>Ukupno</i>			
Kutna nesuglasica		f_β	
Popravka	$v =$	$f_\beta/3$	
Izjednačeni kutovi			
α			
β			
γ			
<i>Ukupno</i>			

a	429,54
b	
c	



Mjereni kutovi			
α	29	17	02
β	56	56	05
γ	93	46	20
<i>Ukupno</i>			
Kutna nesuglasica		f_β	
Popravka	$v =$	$f_\beta/3$	
Izjednačeni kutovi			
α			
β			
γ			
<i>Ukupno</i>			

a	330,45
b	
c	

Sinusov poučak

Trig. obr. br. 13

Računanje trokuta po sinusovom poučku

Trigonometrijski obrazac br. 13.

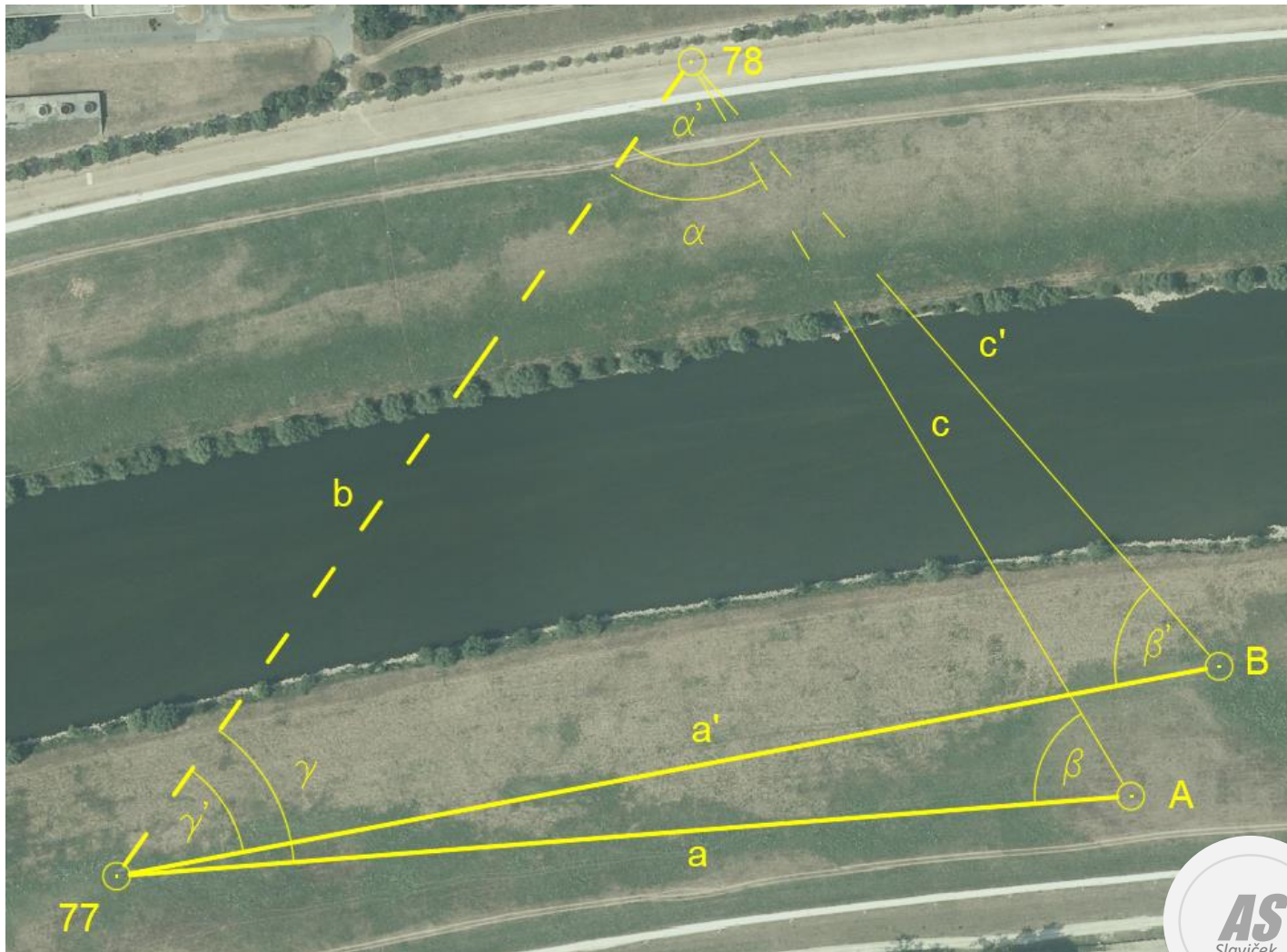
Sinusov poučak	Mjereni kutovi		Izjednačeni kutovi	sin α	Mjerena duljina		
	α	β		sin β			
$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$	β	γ		b · cos γ	a		
TROKUT	$f_{\beta} = 180^{\circ} - (\alpha' + \beta' + \gamma')$			c · cos β	b = m · sin β		
	$v_{\beta} = f_{\beta} / 3$			$m = \frac{a}{\sin \alpha}$	c = m · sin γ		
					a = b · cos γ + c · cos β		
AS	o	'	"	o	'	"	ASlaviček

Računanje trokuta po sinusovom poučku

Trigonometrijski obrazac br. 13.

Sinusov poučak	Mjereni kutovi		Izjednačeni kutovi	sin α	Mjerena duljina				
	α	β		sin β					
$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$	β	γ		b · cos γ	a				
TROKUT	$f_{\beta} = 180^{\circ} - (\alpha' + \beta' + \gamma')$			c · cos β	b = m · sin β				
	$v_{\beta} = f_{\beta} / 3$			$m = \frac{a}{\sin \alpha}$	c = m · sin γ				
					a = b · cos γ + c · cos β				
AS	o	'	"	o	'	"	ASlaviček		
	102	32	25	102	32	17	0,97615	1040,45	
	12	04	42	12	04	34	0,20921	222,99	
	65	23	17	65	23	09	0,90913	969,02	
	180	00	24	180	00	00			
			$f_{\beta} = -24$					92,87714	Kontrola:
			$v_{\beta} = -8$				1065,87	947,572861	1040,45
	49	06	20	49	06	06	0,75587	185,08	
	63	59	56	63	59	42	0,89876	220,07	
	66	54	26	66	54	12	0,91984	225,23	
	180	00	42	180	00	00			
			$f_{\beta} = -42$					86,32822	Kontrola:
			$v_{\beta} = -14$				244,86	98,751779	185,08
	44	36	08	44	36	19	0,70222	454,83	
	55	49	24	55	49	35	0,82734	535,87	
	79	33	55	79	34	06	0,98347	637,00	
	179	59	27	180	00	00			
			$f_{\beta} = 33$					97,02631	Kontrola:
			$v_{\beta} = 11$				647,70	357,803695	454,83

Indirektno mjerenje duljina



Potrebno je odrediti duljinu poligonske stranice „b” (77-78).

Zbog kontrole postavljamo dva trokuta.



U trokutima mjerimo duljinu stranica a i a' i sva tri kuta α , β , γ i α' , β' , γ' .

Oba trokuta računamo po sinusovom poučku.

Dobit ćemo dva rezultata za indirektnu stranicu b (77-78), a za rezultat ćemo uzeti aritmetičku sredinu.



Računanje trokuta po sinusovom poučku

Trigonometrijski obrazac br. 13.

Sinusov poučak	Mjereni kutovi			Izjednačeni kutovi	sin α		Mjereni kutovi	Mjereni kutovi
	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$	α	β		γ	sin β		
						c · cos β <td></td> <td>a b = m * sin β c = m * sin γ</td>		a b = m * sin β c = m * sin γ
TROKUT		$f_{\beta} = 180^{\circ} - (\alpha' + \beta' + \gamma')$				$m = \frac{a}{\sin \alpha}$		a = b · cos γ + c · cos β
AS								ASlaviček
	66	04	12					375,32
	63	40	11					
	50	14	52					
	76	18	36					414,06
	59	42	40					
	43	59	38					

Računanje trokuta po sinusovom poučku

Trigonometrijski obrazac br. 13.

Sinusov poučak	Mjereni kutovi			Izjednačeni kutovi			sin α	b · cos γ	Mjereni duljina
	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$	α	β				sin β		a
TROKUT	$f_{\beta} = 180^{\circ} - (\alpha' + \beta' + \gamma')$	γ	$m = \frac{a}{\sin \alpha}$				$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$		
	$v_{\beta} = f_{\beta} / 3$								
AS	°	'	"	°	'	"			ASlaviček
	66	04	12	66	04	27	0,91407		375,32
	63	40	11	63	40	26	0,89628		368,02
	50	14	52	50	15	07	0,76886		315,70
	179	59	15	180	00	00			
		$f_{\beta} =$	45						235,31463
	$v_{\beta} =$	15					410,60	140,005368	375,32
	76	18	36	76	18	18	0,97157		414,06
	59	42	40	59	42	22	0,86345		367,98
	43	59	38	43	59	20	0,69452		295,99
	180	00	54	180	00	00			
		$f_{\beta} =$	-54						264,75340
	$v_{\beta} =$	-18					426,18	149,306595	414,06

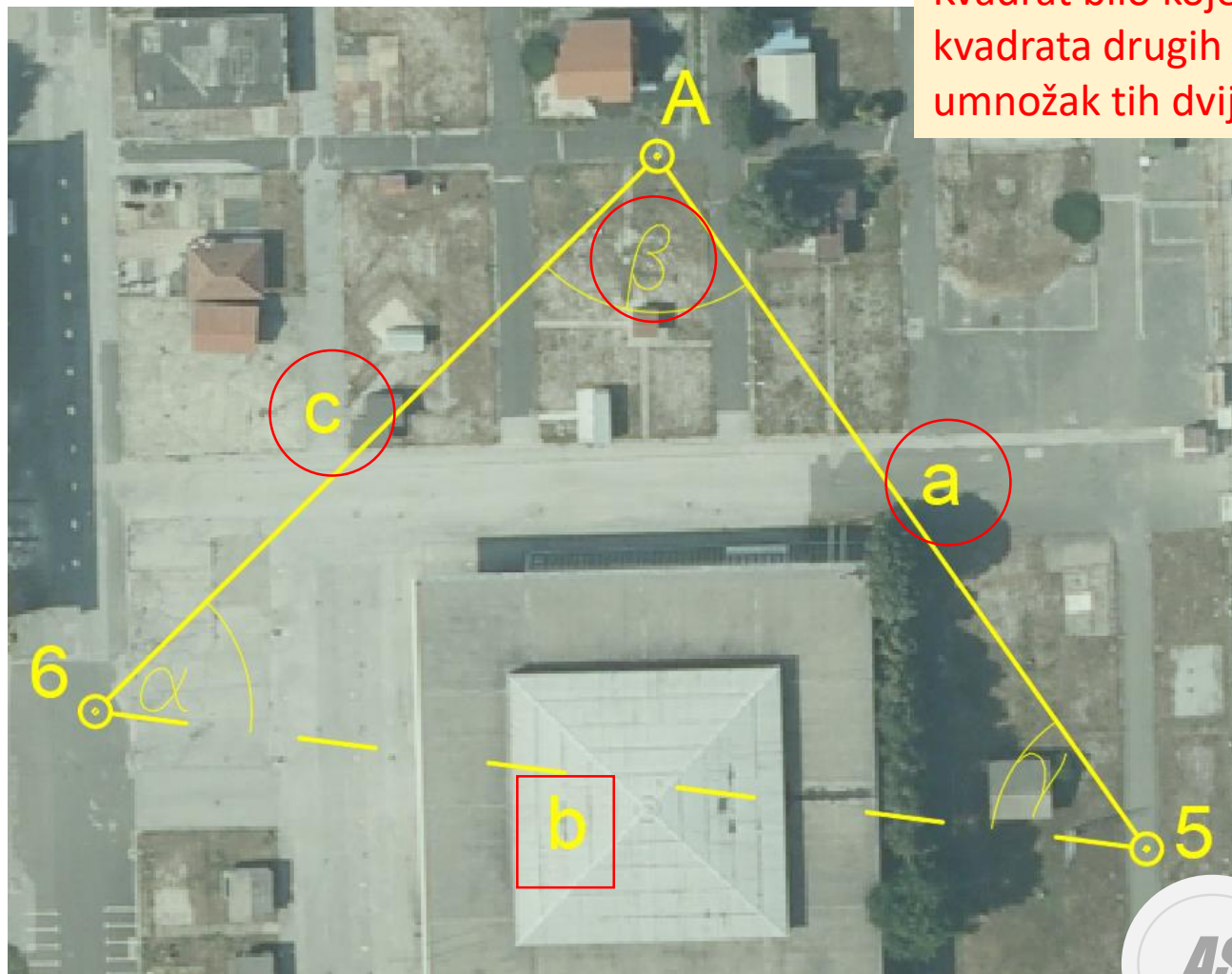
Dobili smo dva rezultata, a za indirektnu stranicu „b” za rezultat ćemo uzeti aritmetičku sredinu.

$$b = \frac{368,02 + 367,98}{2}$$

$$b = 368,00 \text{ m}$$

AS
Slaviček

Kosinsov poučak



Kvadrat bilo koje stranice trokuta jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica umanjen za dvostruki umnožak tih dviju stranica i kosinusa kuta između njih.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

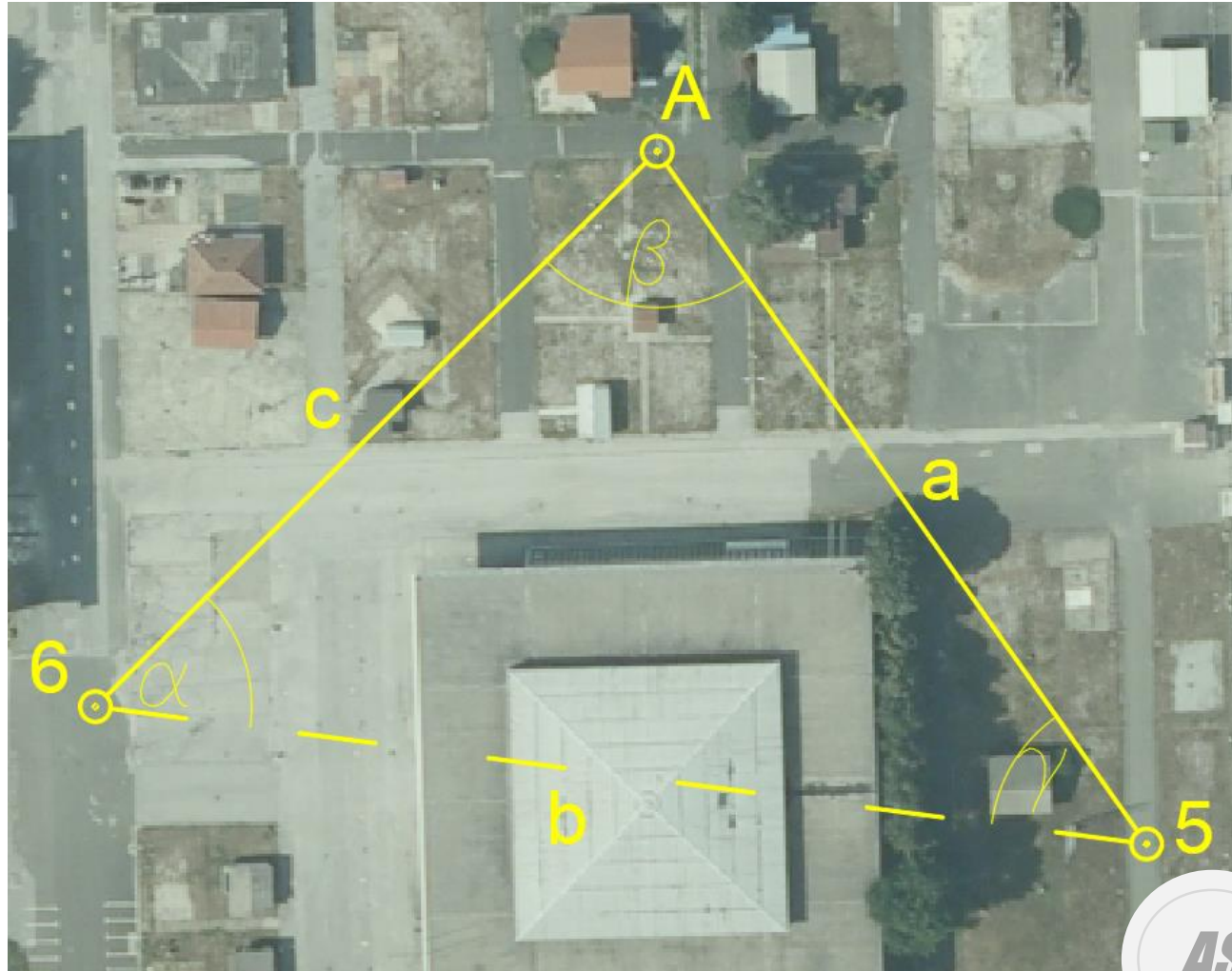
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Kontrola: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Primjena kosinusovog poučka

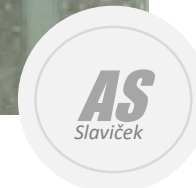


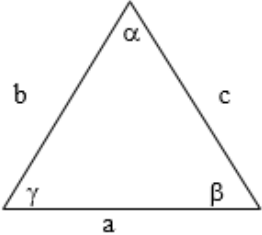
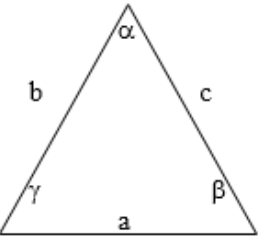
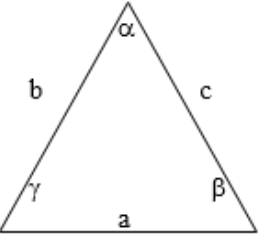
Kada se između točaka poligonske stranice (P5 i P6) nalazi prepreka, tako da se one ne dogledaju, tada razvijemo trokut u kojem ćemo izmjeriti dvije stranice (a i c) i kut koje one zatvaraju (β).

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Računanje trokuta iz dviju mjerenih duljina stranica i kuta između njih								
Skica	Mjerene veličine α, b, c			Računate veličine a, β, γ		Kontrola $a = (b/\sin \beta) \sin \alpha$ $a = (c/\sin \gamma) \sin \alpha$		
						$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$		
AS	e	r	n				ASlaviček	
	α	59	28	52	b	220,65	b^2	48686,4225
	β	61	40	44	c	214,49	c^2	46005,9601
	γ	58	50	24			$\cos \alpha$	0,507822392
	Σ	180	00	00			$2bc \cos \alpha$	48067,64256
					a	215,93	a	215,93
	α	52	08	04	b	166,72	b^2	27795,5584
	β	80	32	47	c	124,25	c^2	15438,0625
	γ	47	19	09			$\cos \alpha$	0,613810716
	Σ	180	00	00			$2bc \cos \alpha$	25430,12887
					a	133,43	a	133,43



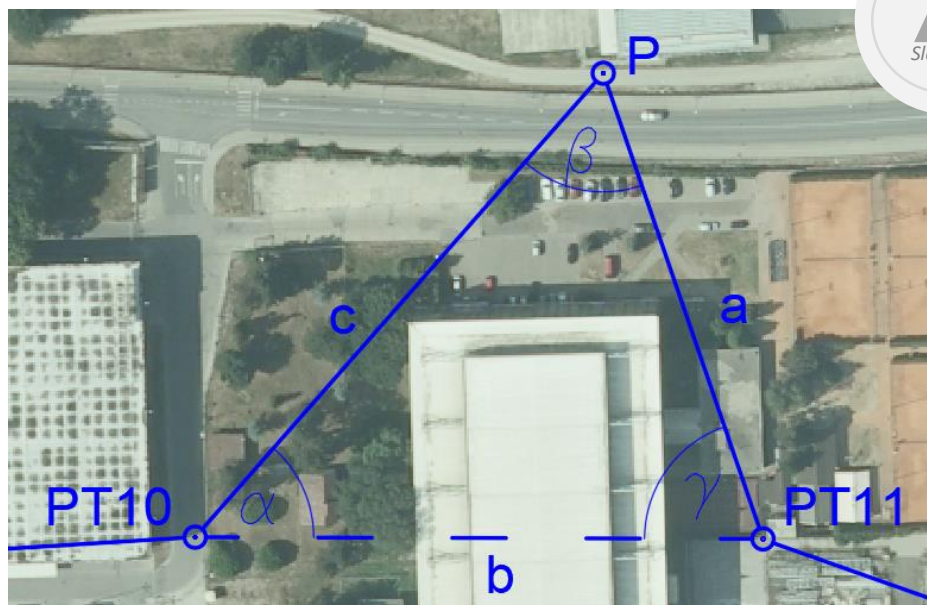
Tangensov poučak

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}$$

Omjer zbroja i razlike duljina dviju stranica trokuta jednak je omjeru tangensa poluzbroja i polurazlike nasuprotnih kutova.

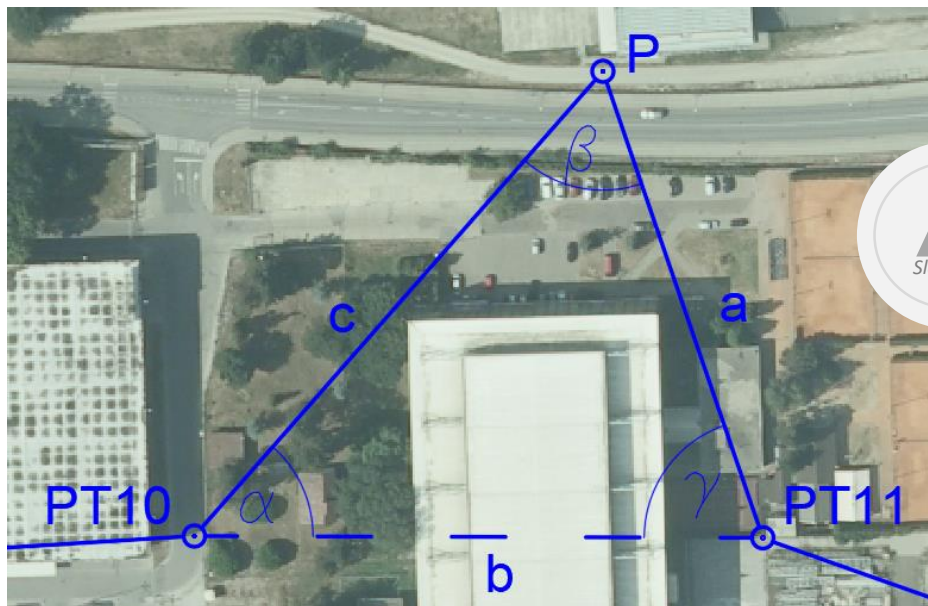


Funkcija **tangens** i funkcija **kosinus** koriste se kada su poznate dvije stranice i kut između njih.

Tangensov poučak ćemo koristiti kada se između krajnjih točaka poligonske stranice, koju treba izmjeriti, nalazi prepreka koja onemogućava da se točke međusobno dogledaju.

Pomoću pomoćne točke P stvorit ćemo trokut PT10-P-PT11 i izmjeriti kut β i dvije stranice a i c.

Tangensov poučak



$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$$

$$\alpha+\gamma = 180^\circ - \beta \Rightarrow \frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \cot\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = \frac{a-c}{a+c} \tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = \frac{a-c}{a+c} \cot\left(\frac{\beta}{2}\right)$$



Računanje trokuta iz dviju mjerenih duljina stranica i kuta između njih

Tangensov poučak

Trigonometrijski obrazac br. 14 - tan

Računanje trokuta iz dviju mjerenih duljina stranica i kuta između njih

<p>Skica</p>	Mjerene veličine α, b, c	$\frac{(\beta + \gamma)}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$		$\beta = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2}$				
	Računate veličine a, β, γ	$\tan \frac{(\beta - \gamma)}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{\alpha}{2}$		$\gamma = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2}$				
	Kontrola $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$		* $a = (b/\sin \beta) \sin \alpha$ $a = (c/\sin \gamma) \sin \alpha$				
AS		o	'	"				ASlaviček
arctan = inverzna funkciji tangensa	α	59	28	52	b	191,53	1 $\alpha/2$	29,74055556
	β	62	25	10	c	183,45	B 3 $\cot(\alpha/2)$	1,750306753
	γ	58	5	58	a	186,150	b-c	8,08
$\frac{(\beta + \gamma)}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$	Σ	180	00	00			b+c	374,98
$\tan \frac{(\beta - \gamma)}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{\alpha}{2}$	$(\beta + \gamma)/2$	60	15	34	Kontrola*		A $(b-c)/(b+c)$	0,021547816
	$(\beta - \gamma)/2$	2	9	36	a	186,150	4 $\arctan(A * B)$	2,1599031

Računanje trokuta iz dviju mjerenih duljina stranica i kuta između njih

Tangensov poučak

Trigonometrijski obrazac br. 14 - tan



Računanje trokuta iz dviju mjerenih duljina stranica i kuta između njih

Mjerene veličine α, b, c								
Računate veličine a, β, γ								
Kontrola $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$								
$\frac{(\beta + \gamma)}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$						$\beta = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2}$		
$\tan \frac{(\beta - \gamma)}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{\alpha}{2}$						$\gamma = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2}$		
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$						$* a = (b/\sin \beta) \sin \alpha$ $a = (c/\sin \gamma) \sin \alpha$		
AS		+/-	o	'	"		ASlaviček	
$\arctan =$ inverzna funkcija tangensa $\frac{(\beta + \gamma)}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ $\tan \frac{(\beta - \gamma)}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{\alpha}{2}$	α	51	34	42	b	171,65	$\alpha/2$	
	β				c	169,25	B $\cot(\alpha/2)$	
	γ				a		b-c	
	Σ						b+c	
	$(\beta + \gamma)/2$					Kontrola*	A	$(b-c)/(b+c)$
	$(\beta - \gamma)/2$					a		$\arctan(A * B)$
	α	51	31	65	b	169,26	$\alpha/2$	
	β				c	167,58	B $\cot(\alpha/2)$	
	γ				a		b-c	
	Σ						b+c	
	$(\beta + \gamma)/2$					Kontrola	A	$(b-c)/(b+c)$
	$(\beta - \gamma)/2$					a		$\arctan(A * B)$

